

7

Resolución de sistemas por el método gráfico

Saberes previos

Representa en un mismo plano cartesiano las funciones $y = 4x - 1$ y $y = -2x + 5$. ¿Tienen algún punto en común?

Analiza

Para llenar un tanque de 31 m^3 se abren dos llaves simultáneamente. Una de ellas se cierra siete horas después de abrirla y la otra, dos horas después. Luego, intenta llenarse un tanque de 27 m^3 con las mismas llaves, pero ahora la primera se cierra a las cuatro horas de abrirla y la segunda, a las tres horas.



- ¿Cuántos litros salen de cada llave en una hora?

Conoce

En la situación presentada puede observarse que los litros que salen de las dos llaves pueden representarse por dos incógnitas, por ejemplo, x y y .

Según las condiciones del problema, la relación entre x y y puede expresarse así:

$$\text{Para el tanque de } 31 \text{ m}^3: \quad 7x + 2y = 31$$

$$\text{Para el tanque de } 27 \text{ m}^3: \quad 4x + 3y = 27$$

Así, para responder la situación debe solucionarse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 31 \\ 4x + 3y = 27 \end{cases}$$

Es posible hallar la **solución del sistema** analizando cada ecuación como una recta y, por tanto, el sistema se entendería como dos rectas que se intersecan en un solo punto. Las coordenadas de dicho punto son los valores que satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones.

Ejemplo 1

Para solucionar el sistema de ecuaciones asociado a la situación inicial, cada una de las ecuaciones generales tiene que transformarse en ecuaciones punto-pendiente.

Las ecuaciones son:

$$y = \frac{31}{2} - \frac{7x}{2} \quad y = -\frac{4x}{3} + 9$$

Ahora se grafican las ecuaciones, conservando una escala adecuada, y se busca el punto que las dos rectas tienen en común.

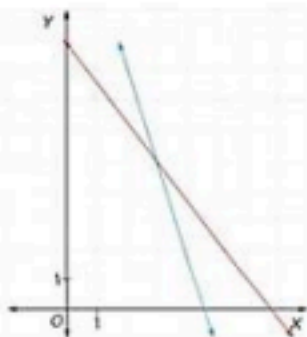


Figura 5.28

En la Figura 5.28 se observa que el punto en el cual se intersecan las dos rectas es $(3, 5)$; es decir, la solución del sistema es $x = 3$; $y = 5$.

Por lo tanto, de la primera llave salen tres litros de agua en una hora y de la segunda salen cinco litros de agua en una hora.

Saberes previos

Despeja la variable y de la ecuación $3y + 4x - 12 = 0$ y describe el procedimiento que realizas.

Analiza

En una granja hay patos y cerdos. Al contar las cabezas hay 50 y al contar las patas hay 134.



• ¿Cuántos animales hay de cada especie?

Conoce

El sistema de ecuaciones que representa la situación puede resolverse con el **método de sustitución**. Si se tiene en cuenta que los cerdos tienen cuatro patas y los patos, dos, las condiciones pueden representarse así:

m : cantidad de patos n : cantidad de cerdos

Total de cabezas entre todos los animales: $m + n = 50$

Total de patas entre todos los animales: $2m + 4n = 134$

$$\begin{cases} m + n = 50 \\ 2m + 4n = 134 \end{cases}$$

Otra manera de solucionar un sistema de ecuaciones se basa en el principio lógico de la **sustitución**, en el cual se propone escribir una incógnita en términos de la otra para una de las ecuaciones y, después, sustituir esta expresión en la otra ecuación.

Para esta situación, el principio de sustitución se aplica como sigue:

$m = 50 - n$ ← Se despeja m en la primera ecuación del sistema.

$2(50 - n) + 4n = 134$ ← Se sustituye $m = 50 - n$ en la segunda ecuación.

$100 - 2n + 4n = 134$ ← Se aplica la propiedad distributiva del producto.

$100 + 2n = 134$ ← Se despeja n .

$$2n = 134 - 100 \Rightarrow n = \frac{34}{2} \Rightarrow n = 17$$

Por tanto, la cantidad de cerdos es 17. Ahora, para averiguar la cantidad de patos, se reemplaza este valor en la expresión $m = 50 - n$, así:

$$m = 50 - 17 = 33.$$

De esta manera, en la granja hay 17 cerdos y 33 patos.

Ejemplo 1

Para resolver el sistema de ecuaciones se realiza el procedimiento descrito.

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + 6y = -9 \end{cases}$$

Se elige la primera ecuación y se despeja x .

$$x = -3 - 2y$$

Este valor se sustituye en la segunda ecuación.

$$3(-3 - 2y) + 6y = -9 \Rightarrow -9 - 6y + 6y = -9 \Rightarrow -9 = -9$$

Como esta igualdad siempre es cierta, se deduce que el sistema tiene infinitas soluciones; así que es compatible indeterminado. Gráficamente se interpreta que las dos ecuaciones generan la misma recta, como se observa en la Figura 5.40.

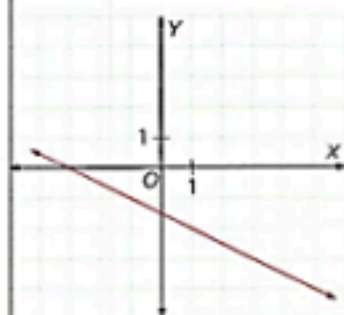


Figura 5.40

Saberes previos

¿Por cuál número entero debes multiplicar todos los términos de la ecuación $3x + 2y = 5$, para que al sumarlos con los términos de la ecuación $6x + y = 8$, se obtenga $-3y = -2$?

Analiza

Un ama de casa va al supermercado y compra 6 kg de café y 3 kg de azúcar por \$ 15 300. Días después nota que no fue suficiente, así que vuelve al supermercado a comprar 1 kg de café y 10 kg de azúcar por \$ 8 250.



• ¿Cuánto cuesta 1 kg de cada producto?

Analiza y conoce

Como se ha estudiado en temas anteriores, algunas situaciones en las que se observa una relación entre dos datos pueden resolverse al plantear y resolver un sistema de ecuaciones.

En este caso, las iniciales de cada producto serán las incógnitas al momento de plantear el sistema correspondiente a la situación.

Sean C: un kilogramo de café y A: un kilogramo de azúcar.

Según los datos del problema, se tienen las ecuaciones: $6C + 3A = 15\,300$ y

$C + 10A = 8\,250$. Así, puede plantearse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6C + 3A = 15\,300 \\ C + 10A = 8\,250 \end{cases}$$

Al solucionar un sistema de ecuaciones por el **método de reducción**, se elimina una de las incógnitas en el sistema de ecuaciones para resolver inicialmente una ecuación de primer grado. Con esta solución, se despeja el valor faltante en una de las dos ecuaciones.

Ejemplo 1

Para solucionar el sistema de la situación inicial por el método de reducción, pueden seguirse los pasos que se describen a continuación.

- 1.° Se determina la incógnita que va a eliminarse; en este caso será C.
- 2.° Se multiplica convenientemente, incluso por un número negativo, una o las dos ecuaciones para poder **reducirlas**. Para el caso, se multiplica la segunda ecuación por -6 , con lo cual el sistema se transforma en:

$$\begin{cases} 6C + 3A = 15\,300 \\ -6C - 60A = -49\,500 \end{cases}$$

- 3.° Se reducen las ecuaciones sumando entre sí los términos semejantes y los valores numéricos de esta manera:

$$\begin{array}{rcl} 6C + 3A & = & 15\,300 \\ -6C - 60A & = & -49\,500 \\ \hline 0C - 57A & = & -34\,200 \end{array}$$

En este caso, la incógnita C se eliminó de la expresión y el resultado de la reducción es una ecuación con una sola incógnita, que es A.

- 4.° Se soluciona la ecuación así: $-57A = -34\,200$, y se obtiene que $A = 600$.
- 5.° Se reemplaza el valor $A = 600$ en una de las ecuaciones:

$$C + 10A = 8\,250 \Rightarrow C = 8\,250 - 6\,000 \Rightarrow C = 2\,250.$$

Por lo tanto, un kilogramo de azúcar cuesta \$ 600 y un kilogramo de café cuesta \$ 2 250.

10 Resolución de sistemas por el método de igualación

Saberes previos

Da diez valores a las variables m y n y verifica si en todos los casos se cumple la igualdad

$$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n).$$

Analiza

La suma de dos números es 51. Si se divide el primero entre 3 y el segundo entre 6, la diferencia de las fracciones obtenidas es 1.



- ¿Qué par de números verifican estas condiciones?

Analiza y conoce

Para plantear el sistema de ecuaciones de la situación propuesta se consideran las siguientes incógnitas:

x : primer número

y : segundo número

$$\begin{cases} x + y = 51 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{6} = 1 \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones que describe la situación

El **método de igualación** para solucionar sistemas de ecuaciones consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones y luego, aplicar la transitividad de las igualdades, con el fin de igualarlas y despejar la otra incógnita.

Ejemplo 1

El sistema presentado en la situación inicial se soluciona como se muestra a continuación.

- 1.° Se despeja y en las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} y = -x + 51 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$$

- 2.° Se igualan los valores de y .

$$-x + 51 = 2x - 6$$

- 3.° Se despeja x .

$$\begin{aligned} -x - 2x &= -6 - 51 \\ -3x &= -57 \\ x &= 19 \end{aligned}$$

- 4.° Se calcula el valor de y .

$$y = -x + 51, \text{ de donde } y = 32$$

Así, los dos números que solucionan el reto son 19 y 32.

Ejemplo 2

Para resolver el sistema $\begin{cases} 7m - 3n = 15 \\ 5m + 6n = 27 \end{cases}$ se puede elegir m para despejar en las dos ecuaciones.

$$7m = 15 + 3n \Rightarrow m = \frac{15 + 3n}{7} \text{ y } 5m = 27 - 6n, \Rightarrow m = \frac{27 - 6n}{5}$$

Se igualan las expresiones y se despeja n : $\frac{15 + 3n}{7} = \frac{27 - 6n}{5} \Rightarrow n = 2$

Se reemplaza el valor de n en una de las dos ecuaciones despejadas para así hallar el valor de m : $m = \frac{15 + 3n}{7}$. Como, $n = 2$, se tiene que $m = \frac{15 + 3(2)}{7}$ por tanto, $m = 3$. La solución gráfica se muestra en la Figura 5.49.

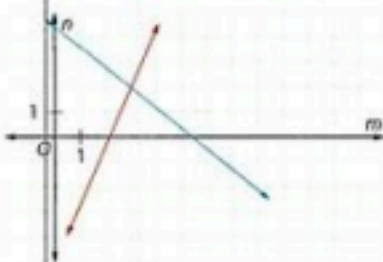


Figura 5.49

11 Resolución de sistemas por la regla de Cramer

Saberes previos

En el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ -3y = 5x - 1 \end{cases}$, ¿cuáles son los coeficientes, los términos independientes y las variables?

Analiza

En una finca se envasan 300 L de leche al día. Para ello, se usan botellas de 2 L y botellas de 5 L, y en total se usan 120 botellas.



- ¿Cuántas botellas de cada capacidad se usan?

Analiza y conoce

Si se considera que:

x : botellas de 2 L y : botellas de 5 L

La información inicial se representa así:

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ 2x + 5y = 300 \end{cases}$$

El método para solucionar este sistema se basa en el concepto de **matriz**.

Una **matriz** es la disposición de números que se asocia con un sistema de ecuaciones. Los números de dicha matriz son los coeficientes numéricos de las incógnitas. Se llama **matriz ampliada** a la disposición que, además de incluir los coeficientes numéricos, incluye las constantes del sistema.

Es posible asignar a una matriz un número real llamado *determinante de la matriz*. Para un sistema de ecuaciones 2×2 , en el cual los coeficientes son a_1 y b_1 en la primera ecuación, a_2 y b_2 en la segunda ecuación, y las constantes son c_1 y c_2 respectivamente, se tiene que:

Sistema	Matriz	Matriz ampliada
$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$

El determinante de la matriz es el número que resulta de $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$.

La **regla de Cramer** es una fórmula basada en los determinantes que pueden plantearse en un sistema de ecuaciones, así:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Ejemplo 1

Aplicando la regla de Cramer a la situación inicial, se tiene que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 120 & 1 \\ 300 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{600 - 300}{5 - 2} = 100 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 120 \\ 2 & 300 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{300 - 240}{5 - 2} = 20$$

Luego, se usan 100 botellas de 2 litros y 20 botellas de 5 litros.

TALLER 1: MÉTODO GRÁFICO

1 Grafica y soluciona cada sistema.



a. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 0,2x + 0,5y = 0,1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = -1 + y \\ x + y = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

Razonamiento

2 Determina la solución de cada sistema de ecuaciones. Verifícala, reemplazándola en las ecuaciones.

a.

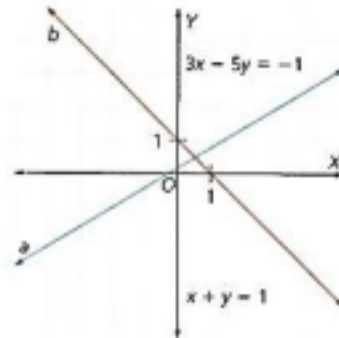


Figura 5.35

b.

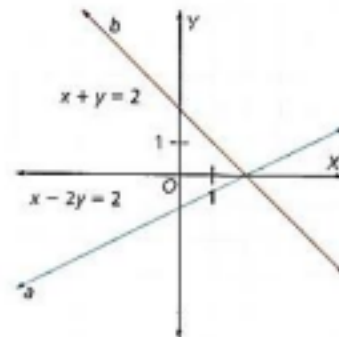


Figura 5.36

c.

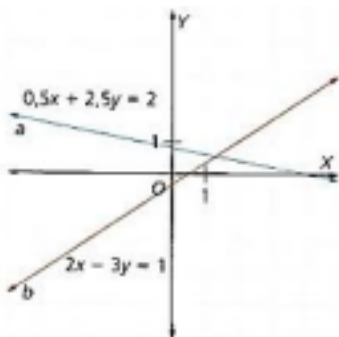


Figura 5.37

TALLER 2: MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

- 1 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de sustitución.

a.
$$\begin{cases} x - 5y = 8 \\ -7x + 8y = 25 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 5m - 2n = 13 \\ m + 3n = 6 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 2w + 5z = -24 \\ 8w - 3z = 19 \end{cases}$$

- 2 Resuelve cada sistema de ecuaciones con el método de sustitución.

Luego, reemplaza la letra correspondiente al sistema y completa la frase. Para ello, utiliza solo el valor de la solución en la incógnita y .

a.
$$\begin{cases} \frac{x-1}{4} + y = 2 \\ 1 - \frac{1+x}{2} = y - 1 \end{cases}$$
 Letra N

b.
$$\begin{cases} \frac{x}{7} - \frac{3y}{4} = 7 \\ \frac{x}{7} + \frac{y}{8} = 0 \end{cases}$$
 Letra I

c.
$$\begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{4} \\ \frac{x}{3} - 1 = \frac{y}{3} \end{cases}$$
 Letra L

d.
$$\begin{cases} \frac{y}{8} - \frac{5x}{6} = 2 \\ \frac{2x}{3} - \frac{3y}{4} = 1 \end{cases}$$
 Letra A

e.
$$\begin{cases} 12x + 5y = -6 \\ \frac{5x}{3} - \frac{7y}{6} = -12 \end{cases}$$
 Letra S

Para solucionar problemas de matemáticas es necesario desarrollar la capacidad de

-4 3 -4 12 -8 6 -8 6

TALLER 3: MÉTODO DE REDUCCIÓN

- 1 Grafica, en el plano cartesiano, las ecuaciones de cada sistema. Luego, determina su solución.

a. $\begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 5x - 6y = 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + 8y = 34 \\ 5x + 6y = 20 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 5x + 7y = 50 \\ 9x + 14y = 97 \end{cases}$

Razonamiento

- 2 Resuelve cada sistema por reducción y busca su solución gráfica abajo (si no está entre las opciones, dibújala en tu cuaderno).

a. $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 6x + 7y = 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + 3y = 10 \\ 3x - 7y = 20 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 8x - 15y = -30 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + 6y = -9 \end{cases}$

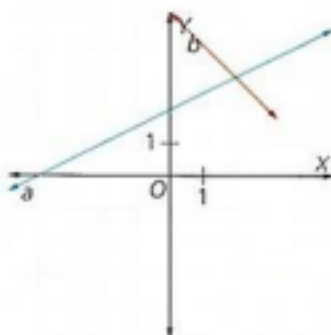


Figura 5.44

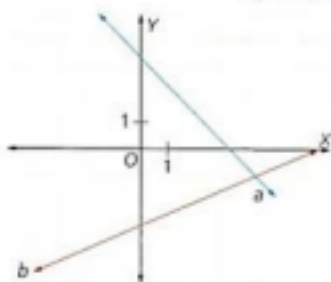
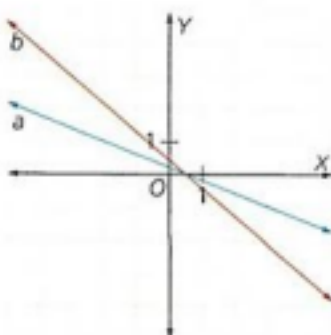


Figura 5.45



TALLER 4: MÉTODO DE IGUALACIÓN

- 1 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de igualación.

a. $\begin{cases} 3x = -4y \\ 5x - 6y = 38 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5a + 2b = 15 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} w - 2z = 10 \\ 2w + 3z = -8 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3s + 4t = 15 \\ 2s + t = 5 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = -\frac{7}{12} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -\frac{1}{6} \end{cases}$

f. $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 6 \\ 3x - 4y = 4 \end{cases}$

Razonamiento

- 2 Descubre el error en el proceso y justifica por qué los valores dados no son la solución de cada sistema planteado.

a. $\begin{cases} 7m + 4n = 13 \\ 5m - 2n = 19 \end{cases}$

$$4n = 13 - 7m$$

$$5m - 2n = 19$$

$$n = \frac{13 - 7m}{4}$$

$$n = \frac{19 + 5m}{2}$$

$$\frac{13 - 7m}{4} = \frac{19 + 5m}{2}$$

$$m = -\frac{50}{34} = -\frac{25}{17}$$

Reemplazando para n , se tiene que:

$$n = \frac{13 - 7\left(-\frac{25}{17}\right)}{4} = \frac{99}{17}$$

De este modo, $m = -\frac{25}{17}$ y $n = \frac{99}{17}$.

b. $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$

$$x = 10 - 2y$$

$$x = \frac{5 - 4y}{2}$$

$$10 - 2y = \frac{5 - 4y}{2}$$

$$20 - 2y = 5 - 4y$$

$$-2y + 4y = 5 - 20 \quad y = -\frac{15}{2}$$

Reemplazando para x , se tiene que:

$$x = \frac{5 - 4\left(-\frac{15}{2}\right)}{2} = \frac{35}{2}$$

TALLER 5: REGLA DE CRAMER

1 Calcula los siguientes determinantes.



a. $\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} c^2 & a \\ c^2 - a & a \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} x+2 & x+7 \\ x+7 & x+2 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} m+1 & m \\ m & m^2 \end{vmatrix}$

2 Determina el valor de la variable en cada caso.



a. $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 15$

b. $\begin{vmatrix} m & 1 \\ m & m+1 \end{vmatrix} = 100$

c. $\begin{vmatrix} x & -8 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 16$

d. $\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 5 & x-1 \end{vmatrix} = 25$

Razonamiento

3 Resuelve cada uno de los siguientes sistemas por el método de Cramer y explica la representación gráfica de cada solución.

a. $\begin{cases} 9x - y = 16 \\ x + y = 8 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 5y = 8 \\ 3y + 7x = -13 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 7x + 3y = -26 \\ 4x + y = -4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x + 5y = -12 \\ 7x - 5y = 22 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 7 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y = 1 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 5x - 4y = 0 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 6x - 5y = -43 \\ x - 5y = -28 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 2(x - y) = 5 \\ 4(1 - y) = 3x \end{cases}$