



1

Función cuadrática. Representación gráfica

Pensamiento variacional

Saberes previos

Describe cómo es el salto de un conejo o el lanzamiento de un balón de baloncesto dirigido hacia la cesta. ¿Qué otros movimientos conoces que sean similares a estos?

Analiza

El salto de cierta rana se puede modelar mediante la función:

$$h(t) = 2t - t^2$$

Donde t es el tiempo medido en segundos y h la altura en metros.

- ¿Cuánto tardará el salto de la rana? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la rana en ese salto?

Conoce

En la Tabla 6.1 se muestra la altura del salto de la rana en cinco momentos distintos.

t	0	0,5	1	1,5	2
$h(t)$	0	0,75	1	0,75	0

Tabla 6.1

Según los datos, la rana está en el piso cuando $t = 0$ y $t = 2$, pues su altura es 0 en ambos instantes. Es decir, $h(0) = 0$ y $h(2) = 0$. El instante $t = 0$ corresponde al momento de iniciar el salto, y el instante $t = 2$ corresponderá al instante en que la rana vuelve al piso después de haber saltado. Esto significa que el salto tarda dos segundos.

Por otra parte, la máxima altura que alcanza la rana corresponde al mayor valor de $h(t)$ registrado en la tabla: 1. Por esto se deduce que la mayor altura que alcanza la rana en este salto es de 1 m.

Muchas situaciones son modeladas mediante funciones que involucran el cuadrado de una variable. Este tipo de funciones se denominan **funciones cuadráticas**.

Una **función cuadrática** es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a , b y c son números reales y $a \neq 0$.

1.1 Representación gráfica de una función cuadrática

La representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola que se caracteriza por tener los siguientes elementos.

- **Vértice (V):** punto donde la parábola alcanza su punto máximo, si $a < 0$, o su punto mínimo, si $a > 0$.
- **Cortes de la parábola con los ejes coordenados (ceros de la función):** puntos donde el valor de la función es 0. Las coordenadas de los puntos de corte con el eje X son de la forma $(x, 0)$. En estos casos, el valor de x se halla resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
- **Eje de simetría:** recta paralela al eje Y , que pasa por la coordenada x del vértice de la parábola.
- **Concavidad:** una parábola es cóncava hacia arriba, si $a > 0$, o es cóncava hacia abajo, si $a < 0$.

x	$f(x)$
-4	-10
-2	-4
0	-2
2	-4
4	-10

Tabla 6.2

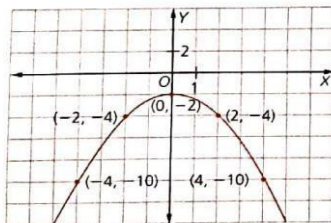


Figura 6.1

Ejemplo 1

Para representar gráficamente la función $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2$, se puede completar una tabla de valores como la Tabla 6.2, asignando valores arbitrarios a la variable x . Luego, se representan en el plano cartesiano. Como la función está definida para cualquier valor real, al trazar la curva se obtiene la Figura 6.1.

1.2 Funciones de la forma $f(x) = ax^2$

Una función definida por la expresión $y = ax^2$, con $a \neq 0$, se conoce como **función cuadrática con vértice en el origen**.

El vértice de la parábola que describe la función $f(x) = ax^2$ es $(0, 0)$; el eje de simetría de esta parábola es el eje Y .

Ejemplo 2

Se puede determinar la variación de las gráficas de las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2$, analizando el resultado para los distintos valores de a .

- Si $a > 1$, la gráfica de la función es una contracción de la gráfica de la función $f(x) = x^2$. Si $0 < a < 1$, la gráfica de la función es una dilatación de la gráfica de la función $f(x) = x^2$.

En la Tabla 6.3, las parábolas representadas son $f(x) = x^2, g(x) = 2x^2$ y

$h(x) = 4x^2$ para $a > 1$; y $f(x) = x^2, g(x) = 0.5x^2$ y $h(x) = 0.33x^2$ para $0 < a < 1$.

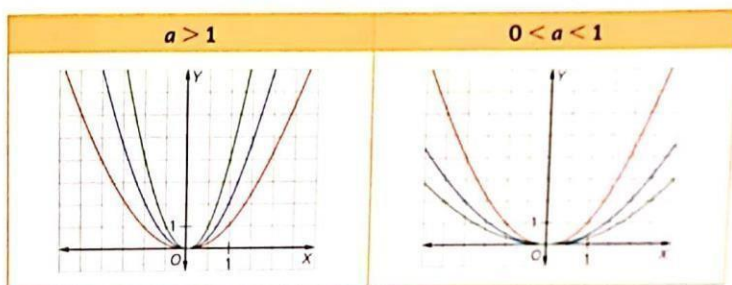


Tabla 6.3

- Cuando $a < 0$, las gráficas de las funciones se obtienen reflejando las gráficas de los casos anteriores con respecto al eje X , como se ve en la Tabla 6.4.

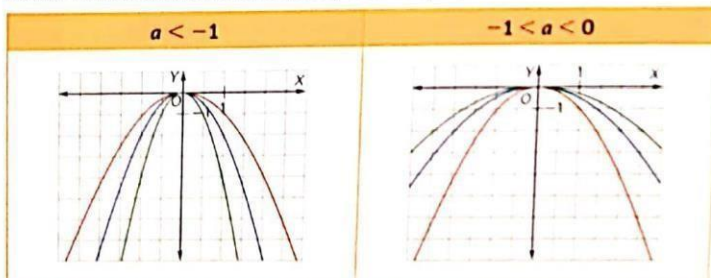


Tabla 6.4

1.3 Funciones de la forma $f(x) = ax^2 + c$

La parábola que describe la función $f(x) = ax^2 + c$ es una traslación vertical de c unidades de la parábola $f(x) = ax^2$. Esta traslación es hacia arriba si $c > 0$ y hacia abajo si $c < 0$.

El vértice de la parábola $f(x) = ax^2 + c$ está ubicado en el punto $(0, c)$ y el eje de simetría es el eje Y .

1 Función cuadrática. Representación gráfica

1.4 Funciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

La función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una función cuadrática en la cual a , b y c son diferentes de 0.

La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ puede llevarse a una de las formas:

$$f(x) = a(x - h)^2 \text{ o } f(x) = a(x - h)^2 + k$$

- Si la función es de la forma $f(x) = a(x - h)^2$, el vértice de la parábola es el punto $(h, 0)$ y el eje de simetría es el eje Y .
- Si la función es de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, el vértice de la parábola es el punto (h, k) y el eje de simetría es la recta $x = h$.

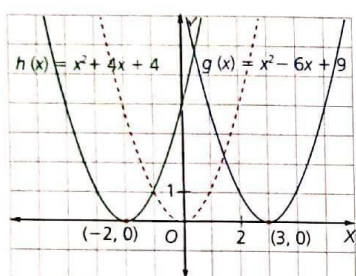


Figura 6.2

Ejemplo 3

La función $g(x) = x^2 - 6x + 9$ se puede expresar como $g(x) = (x - 3)^2$, por lo tanto, su vértice es $(3, 0)$. Además, su gráfica se obtiene trasladando horizontalmente la parábola $f(x) = x^2$, tres unidades a la derecha.

Ejemplo 4

La función $h(x) = x^2 + 4x + 4$ se puede expresar como $g(x) = (x + 2)^2$, por lo tanto, su vértice es $(-2, 0)$. Su gráfica se obtiene trasladando horizontalmente la parábola $f(x) = x^2$, dos unidades a la izquierda (Figura 6.2).

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

- 1 Identifica cuáles de las siguientes expresiones pueden representar una función cuadrática.

- $f(x) = -16x^2 + 14x + 10$
- $f(p) = 16p^3 + 14p^2 + 12$
- $f(n) = -0,25n^2 - 0,5n + 1$
- $f(x) = -6x + 1$
- $f(t) = -4t - 5 + 32t^2$

Razonamiento

- 2 Escribe cada una de las siguientes funciones en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Luego, identifica los valores correspondientes de a , b y c .

- $f(x) = 4x + 10 - 16x^2$
- $f(x) = -6x + 5 + x^2$
- $f(x) = x^2 + 10 - 6x$
- $f(x) = -2 + x^2 - 4x$

Comunicación

- 3 Escribe la ecuación del eje de simetría de cada parábola y las coordenadas del vértice.

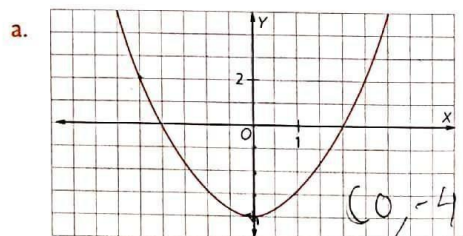


Figura 6.3

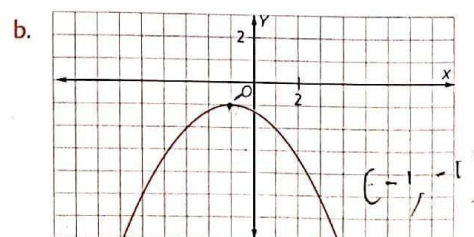


Figura 6.4



Comunicación

4. Elabora las gráficas de las funciones cuadráticas de cada grupo en un mismo plano cartesiano. Explica sus diferencias y semejanzas.

a. $f(x) = 2x^2$ $g(x) = -2x^2$
 b. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $g(x) = 2x^2$
 c. $f(x) = 2x^2$ $g(x) = 3x^2$ $h(x) = 4x^2$
 d. $f(x) = -2x^2$ $g(x) = -3x^2$ $h(x) = -4x^2$

5. Determina la ecuación de la función cuadrática que define cada tabla de valores.

a.

x	-2	-1	0	1	2
y	1	-2	-3	-2	1

Tabla 6.5

b.

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$

Tabla 6.6

6. Lleva cada función a la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.
 Luego, escribe las coordenadas del vértice de la parábola que la representa.

a. $f(x) = x^2 + 2x + 3$
 b. $f(x) = x^2 - 2x + 5$
 c. $f(x) = 3x^2 + 6x + 4$

A →

Resolución de problemas

7. El movimiento de una pelota puede expresarse mediante la función $f(x) = -5x^2 + 20x + 10$, donde x representa el tiempo en segundos y $f(x)$, la altura en metros.

- a. Representa gráficamente la función $f(x)$.
 b. ¿Qué significa que la gráfica tenga un punto máximo o mínimo?
 c. ¿Qué altura alcanza la pelota al transcurrir dos segundos desde el inicio del movimiento?

8. El movimiento de cierta partícula está determinado por la función $f(x) = x^2 - 4$. Su trayectoria se muestra en la Figura 6.5.

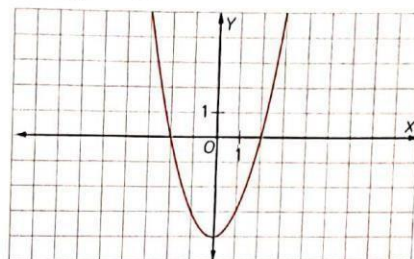


Figura 6.5

- a. ¿Qué coordenadas tiene el punto más bajo que alcanza la partícula?
 b. ¿En qué puntos la trayectoria corta a los ejes?

Evaluación del aprendizaje

- i. Observa la Figura 6.6. ¿Qué tipo de transformación sufrió la parábola a para obtener la parábola b ? Determina las funciones que las describen.

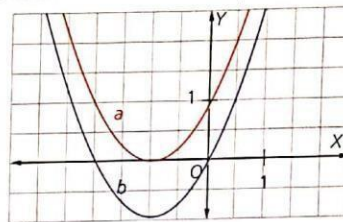


Figura 6.6

- ii. La trayectoria de cierto satélite se ajusta a la gráfica de la función $f(x) = 6x^2 - 12$, donde x representa el tiempo en días y $f(x)$ el recorrido en kilómetros. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido el satélite al cabo de diez días desde su lanzamiento?

Educación ambiental

El nivel y de contaminación de un río está dado por la función $y = -8x^2 - 16$, donde x representa el tiempo medido en horas. ¿A qué hora del día el río se encuentra más contaminado?

- ¿Qué acciones puedes tomar para evitar que se sigan contaminando los ríos?

2

Obtención de los ceros de una función cuadrática

Saberes previos

Representa gráficamente la función $y = 3x^2 - 3$. ¿Cuáles son los puntos de corte de la gráfica con los ejes?

Analiza

Una compañía de alimentos diseña una caja para empaclar sus productos con un volumen igual a 72 dm^3 . Sus dimensiones están representadas en la Figura 6.7.

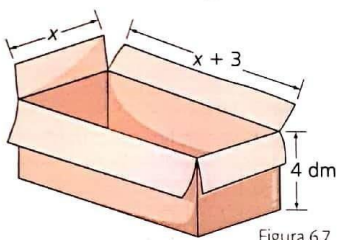


Figura 6.7

- Encuentra las dimensiones de la caja en decímetros.

Conoce

El volumen $V(x)$ de una caja se halla multiplicando sus tres dimensiones, entonces para la situación $V(x) = 4x^2 + 12x - 72$.

Para hallar las dimensiones de la caja es necesario determinar los ceros de la función cuadrática $V(x)$ que corresponden a los valores de x para los cuales $4x^2 + 12x - 72 = 0$. Como en este caso no es práctico recurrir a la factorización, se utiliza la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, así:

En la ecuación $4x^2 + 12x - 72 = 0$, $a = 4$, $b = 12$ y $c = -72$, por lo tanto:

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-72)}}{2 \cdot 4} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 9}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \text{ o } x_2 = -6$$

Al considerar las condiciones del problema, se deduce que la respuesta válida es $x = 3$, de modo que las dimensiones de la caja son: 3 dm, 6 dm y 4 dm

La fórmula general para encontrar los ceros de una función cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con a , b y c números reales, es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 1

Observa cómo se aplica la fórmula general para hallar los ceros de la función asociada a la ecuación $x^2 - 2x - 960 = 0$.

Como $a = 1$, $b = -2$ y $c = -960$, entonces:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-960)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 3840}}{2} = \frac{2 \pm 62}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2 + 62}{2} = 32 \text{ y } x_2 = \frac{2 - 62}{2} = -30$$

2.1 Discriminante de una ecuación de segundo grado

La expresión $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de **discriminante**. Es el valor que determina el tipo de ceros de la ecuación de segundo grado.

Dada la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, con a , b y c números reales, se consideran los siguientes casos:

- Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una única solución real.
- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

**Ejemplo 2**

Observa cómo se determina el tipo de soluciones de las ecuaciones cuadráticas $x^2 + 6x + 9 = 0$, $3x^2 + 5x + 6 = 0$ y $2x^2 + 5x - 3 = 0$, analizando su discriminante.

- El discriminante de la ecuación $x^2 + 6x + 9 = 0$ es:

$$b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación tiene una única solución real.

- El discriminante de la ecuación $2x^2 + 5x - 3 = 0$ es:

$$b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49$$

Como $49 > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales.

- El discriminante de la ecuación $3x^2 + 5x + 6 = 0$ es:

$$b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -47$$

Como $-47 < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

Actividades de aprendizaje**Ejercitación**

- 1 Resuelve las siguientes ecuaciones usando la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

a. $x^2 + 3x - 10 = 0$

b. $x^2 - 3x - 4 = 0$

c. $-x^2 - 4x - 2 = 0$

d. $-2x^2 - x = -6$

e. $(x + 2)^2 + 1 = 0$

f. $(x - 3)^2 - 4 = 0$

g. $-0,5x^2 + 2x + 1,5 = 0$

h. $1,5x^2 + 2x = 0$

i. $(x + 2)(x - 3) = 6$

j. $(x + 1)(x - 5) = 16$

Razonamiento

- 2 Determina el tipo de raíces que tiene cada ecuación estudiando su discriminante. Luego, resuelve aquellas que tengan solución o soluciones reales.

a. $8x^2 - 5x + 1 = 0$

b. $x(2x - 3) = 20$

c. $6x^2 + x + 2 = 0$

d. $x - 2x^2 = 8$

e. $2x^2 + x - 2 = 0$

f. $-3x^2 - x + 1 = 0$

Resolución de problemas

- 3 El largo de una sala rectangular es 3 m mayor que el ancho. Si el ancho aumenta 3 m y el largo aumenta 2 m, el área se duplica. ¿Cuál es el área original de la sala?
- 4 Un número entero es tal que el cuadrado del antecesor de su doble es equivalente al cuadrado del número aumentado en 5. ¿Cuál es el número?

Evaluación del aprendizaje

- ✓ Examina la Figura 6.8 y determina la ecuación cuadrática asociada a la parábola. ¿Cuáles son los ceros de la función?

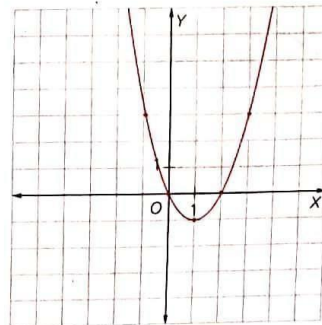


Figura 6.8

Saberes previos

Traza la gráfica de las siguientes funciones:

- $f(x) = 5$
- $g(x) = -2x + 1$
- $h(x) = x^2 - 5x + 1$

Analiza

Sea la función:

$$f(x) = 8x + 5x^2 - 3x^3 - 2$$

- ¿Qué clase de función es $f(x)$?
- ¿Cuáles son sus características?

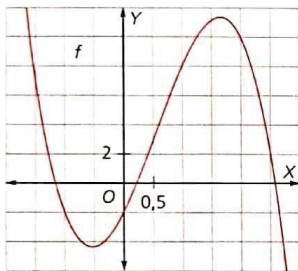


Figura 6.9

Conoce**3.1 Funciones polinómicas de tercer grado**

La expresión algebraica de la función $f(x)$ es equivalente a:

$$f(x) = -3x^3 + 5x^2 + 8x - 2$$

Esta expresión es un polinomio de tercer grado, porque 3 es el mayor exponente de la variable x y corresponde a una función **polinómica de tercer grado**.

Se observa que $f(x)$ está definida para cualquier valor real, por lo que $D(f) = \mathbb{R}$. Además todo x tiene una imagen a través de f en el conjunto de los números reales, esto significa, que es una función continua tal que $R(f) = \mathbb{R}$, como se muestra en la Figura 6.9.

Una función polinómica de tercer grado o **cúbica** es de la forma:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ con } a, b, c, d \text{ reales y } a \neq 0$$

- El dominio de la función es el conjunto de los números reales.
- La función es continua en todo su dominio.

Ejemplo 1

En la Figura 6.10, se puede verificar que la función polinómica $f(x) = -x^3 - 4$ es continua. Su dominio y su rango coinciden con el conjunto $\mathbb{R}$.

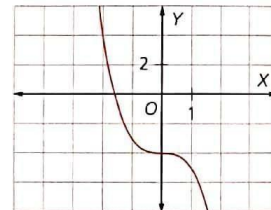


Figura 6.10

3.2 Funciones polinómicas de cuarto grado

Una función polinómica de cuarto grado o **cuártica** es de la forma:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \text{ con } a, b, c, d, e \text{ reales y } a \neq 0$$

- El dominio de la función es el conjunto de los números reales.
- La función es continua en todo su dominio.

Ejemplo 2

Para representar la función $f(x) = x^4 - x^2$ es necesario determinar los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje X . Esto es:

$$x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1 \text{ y } x = -1$$

También resulta útil calcular algunos pares adicionales de valores de función, con lo cual se completa una tabla como la siguiente.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	0	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{15}{256}$	0	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{15}{256}$	0

Al representar estos puntos se obtiene la gráfica de la Figura 6.11.

Tabla 6.7

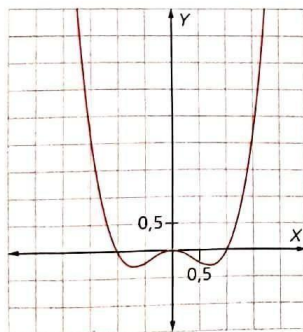


Figura 6.11

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

- 1 Completa una tabla de valores para representar cada función cúbica.

a. $f(x) = 2x^3$ b. $f(x) = 2 - x^3$
 c. $f(x) = x^3 - 3$ d. $f(x) = -3x^3 + 2$

- 2 Representa las siguientes funciones cuárticas.

a. $f(x) = x^4$ b. $f(x) = 2x^4$
 c. $f(x) = x^4 + 1$ d. $f(x) = 2x^4 - 3$

- 3 Haz un bosquejo de la gráfica de cada función polinómica, presentada de forma factorizada.

a. $j(x) = (x - 1)(x + 2)$
 b. $m(x) = (x - 1)^2(x - 3)$
 c. $t(x) = \frac{1}{5}x(x - 5)^2$
 d. $p(x) = (x - 3)(x + 2)(3x - 2)$
 e. $r(x) = (2x - 1)(x + 1)(x + 3)$

Razonamiento

- 4 Ten en cuenta las siguientes funciones polinómicas.

◆ $f(x) = -x^3 + x$ y $g(x) = x^4 + x^2$

- Construye una tabla de valores y realiza las gráficas correspondientes.
- Describe el dominio.
- Determina el recorrido.
- Encuentra los cortes de la gráfica con los ejes.
- Estudia la simetría.
- Estudia la continuidad.
- Analiza los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica.
- Encuentra los máximos y los mínimos.

- 5 Elabora las gráficas de las funciones en un mismo plano cartesiano. Luego, responde las preguntas.

$y = x^2, y = x^3, y = x^4$ y $y = x^5$ para $-1 \leq x \leq 1$

- ¿A qué se asemejaría la gráfica de $y = x^{100}$ en este mismo intervalo?
- ¿Qué se podría decir acerca de $y = x^{101}$?

Resolución de problemas

- 6 Relaciona cada función polinómica con su gráfica correspondiente.

a. $P(x) = x(x^2 - 4)$ c. $R(x) = x^4 + 2x^3$
 b. $Q(x) = -x^2(x^2 - 4)$ d. $T(x) = -x^3 + 2x^2$

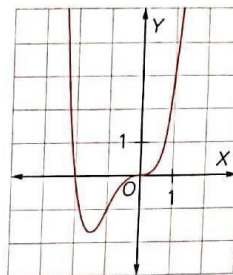


Figura 6.12

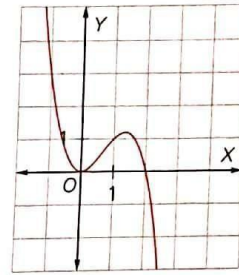


Figura 6.13

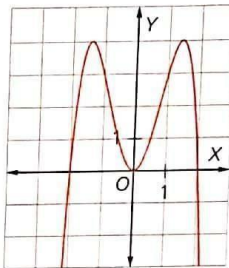


Figura 6.14

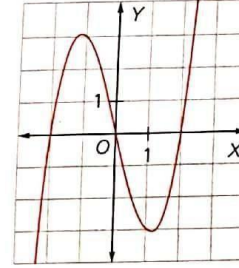


Figura 6.15

Evaluación del aprendizaje

- ✓ Se construye una caja abierta de una pieza de cartón de 20 cm por 40 cm cortando cuadros de longitud lateral x de cada esquina y doblando hacia arriba los lados, como se observa en la Figura 6.16.

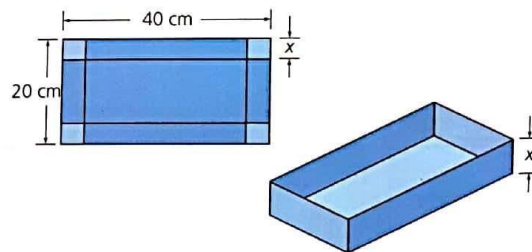


Figura 6.16

- Expresa el volumen V de la caja como una función en términos de la longitud x .
- ¿Cuál es el dominio de V ?
- Realiza una gráfica de la función V y empléala para estimar el volumen máximo de la caja.

Actividad: Analizando la Productividad de la Región

Tema central: La productividad agropecuaria y ganadera en la

Desarrollo de la actividad

- **Investigar** o recopilar información sobre:
 - Productos agrícolas o ganaderos más importantes.
 - Dificultades que afectan la productividad (clima, transporte, precios, etc.).
- **Elaborar una cartilla o póster** con:
 - Nombre del municipio.
 - Un mapa pequeño señalando su ubicación.
 - Fotos o dibujos y breve descripción de la productividad de la zona.